
VEKTOREN UND KREUZPRODUKT

Neben der Addition und dem Skalarprodukt von zwei Vektoren gibt es noch eine weitere wichtige Operation, wenn die Vektoren Elemente eines dreidimensionalen Vektorraums sind: das Kreuzprodukt.

[P3] *Umgang mit Vektoren*
Üben Sie den Umgang mit Vektoren in Komponentenschreibweise an den folgenden Beispielen:

(a) Berechnen Sie für die Vektoren $\vec{a} \doteq \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} \doteq \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix}$ die Ausdrücke

$$\vec{a} \times \vec{b}\,, \quad (\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})\,, \quad \vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b})\,, \quad \vec{e} = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|}\,.$$

(b) Zerlegen Sie $\vec{a} \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{a}_{\|} + \vec{a}_{\perp}$ bezüglich $\vec{b} \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Überprüfen Sie, dass $\vec{a}_{\|} \cdot \vec{a}_{\perp} = 0$ ist.

(c) Überlegen Sie allgemein, wie die die Zerlegung eines Vektors $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ in Bezug auf eine Richtung $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$, $|\vec{n}| = 1$, mit Hilfe von Skalar- und Kreuzprodukt geschrieben werden kann. *Hinweis*: Denken Sie an die *bac*-*cab*-Regel.

[P4] *Vektoren und Geometrie*
Auf welchen geometrischen Gebilden liegt der Ortsvektor $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ unter den folgenden Bedingungen, wobei außer $\vec{r}$ alle Größen fest gewählt sind?

$$\vec{r} \cdot \vec{n} = n^2\,, \quad (\vec{r} - \vec{r}_0)^2 = R^2\,, \quad \vec{r} \times \vec{a} = \vec{n} \times \vec{a}\,.$$

Man beachte für einen beliebigen Vektor $\vec{b}$ folgende, häufig verwendete, Schreibweise: $|\vec{b}| = b$, also $|\vec{b}|^2 = \vec{b}^2 = b^2$.

[P5] *Polarisationsformel*
Verwenden Sie die binomischen Formeln, um das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ allein durch Längenquadrate geeigneter Vektoren auszudrücken.